ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

CHOUAKHA HOUA TOU XAY

ĐA THỨC HILBERT CỦA IĐÊAN ĐƠN THỨC

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

CHOUAKHA HOUA TOU XAY

ĐA THỨC HILBERT CỦA IĐÊAN ĐƠN THỨC

Chuyên ngành: Đại số và Lý thuyết số
Mã số: 60.46.01.04

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học
TS. TRẦN NGUYÊN AN

THÁI NGUYÊN - 2016

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan rằng nội dung trình bày trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với các đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan rằng mọi sự giúp đỡ cho việc thực hiện luận văn này đã được cảm ơn và các thông tin trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên, ngày 10 tháng 04 năm 2016

Người viết luận văn

CHOUAKHA HOUATOUXAY

Mục lục

MỞ ĐẦU

Cho đại số giao hoán phân bậc hữu hạn sinh trên một trường, hàm Hilbert, đa thức Hilbert, chuỗi Hilbert là ba khái niệm có quan hệ mật thiết với nhau, xác định sự biến thiên về chiều của các thành phần thuần nhất của đại số. Các khái niệm này thường được nghiên cứu trên các đối tượng sau:

1. Vành thương của vành đa thức nhiều biến trên một iđêan đơn thức;
2. Vành thương của vành đa thức nhiều biến trên một iđêan thuần nhất;
3. Vành địa phương với lọc là lũy thừa của iđêan tối đại.

Đa thức Hilbert và chuỗi Hilbert là các công cụ quan trọng trong Hình học Đại số. Chúng là công cụ dễ nhất để xác định chiều và bậc của một đa tạp Đại số xác định bởi các phương trình đa thức.

Luận văn tìm hiểu về hàm Hilbert, đa thức Hilbert và chuỗi Hilbert của lớp vành thương của vành đa thức nhiều biến trên một iđêan đơn thức. Trường hợp này cho ta nhiều kết quả trực quan, liên hệ với hai lớp vành quan trọng trong Đại số giao hoán, Hình học đại số và Đại số tổ hợp là vành Stanley-Reisner và vành mặt. Hơn nữa một kết quả của Macaulay cho thấy ta có thể chuyển việc nghiên cứu hàm Hilbert, đa thức Hilbert, chuỗi Hilbert của lớp vành thương của vành đa thức nhiều biến trên một iđêan thuần nhất về trường hợp vành thương của vành đa thức nhiều biến trên một iđêan đơn thức. Luận văn là sự tổng hợp của nhiều tai liệu ([2], [4], [6], [7], ...).

Luận văn bao gồm hai chương. Chương 1 trình bày một số kiến thức chuẩn bị về vành đa thức nhiều biến, iđêan đơn thức, cơ sở Gröbner và thuật toán Buchsberger để tìm cơ sở Gröbner. Đây là công cụ để chuyển bài toán tìm hiểu hàm Hilbert của lớp vành thương của vành đa thức nhiều biến trên một iđêan thuần nhất về trường hợp vành thương của vành đa thức nhiều biến trên một iđêan đơn thức. Chương 2 là chương chính của luận văn. Trong chương này luận văn trình bày về hàm Hilbert (afin), đa thức Hilbert, chuỗi Hilbert của vành thương của vành đa thức nhiều biến trên một iđêan đơn thức. Đặc biệt để mô tả kỹ hơn các kết quả trên, luận văn tìm hiểu hai lớp vành Stanley-Reisner và vành mặt.

Luận văn được hoàn thành dưới sự hướng dẫn tận tình của TS. Trần Nguyên An. Nhân dịp này tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới thầy. Tôi xin cảm ơn các thầy cô ở Viện Toán học, Khoa Toán và Khoa Sau Đại học trường Đại học Sư phạm - Đại học Thái Nguyên đã tận tình giảng dạy và giúp đỡ tôi trong quá trình học tập tại trường.

Cuối cùng tôi xin cảm ơn người thân, bạn bè đã cổ vũ và động viên tôi để tôi có thể hoàn thành luận văn cũng như khóa học của mình.

Chương 1

Vành đa thức và iđêan đơn thức

Trong chương này, ta nhắc lại một số khái niệm cơ bản và các tính chất của vành đa thức và iđêan đơn thức.

1.1. Vành đa thức

Cho R là một vành giao hoán và $x_1, \ldots, x_n (n \geq 1)$ là các biến. Ta gọi *đơn thức* là một biểu thức có dạng $x_1^{a_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{a_n}$, trong đó $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ được gọi là bộ số mũ của đơn thức. Nếu $a_1 = \ldots = a_n = 0$, thì đơn thức được kí hiệu là 1.

Phép nhân trên tập các đơn thức được định nghĩa như sau:

$$(x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n})(x_1^{b_1} \ldots x_n^{b_n}) = x_1^{a_1+b_1} \ldots x_n^{a_n+b_n}.$$

Do đó nếu đồng nhất x_1 với đơn thức $x_1^1 x_2^0 \ldots x_n^0, \ldots, x_n$ với đơn thức $x_1^0 \ldots x_{n-1}^0 x_n^1$, thì đơn thức là tích của các biến.

Từ là biểu thức có dạng $\alpha x_1^{a_1} ... x_n^{a_n}$, với $\alpha \in R$ được gọi là *hệ số* của từ. Hai từ khác không $\alpha x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$ và $\beta x_1^{b_1} \ldots x_n^{b_n}$ được gọi là *đồng dạng* với nhau nếu $a_i = b_i, \forall i = \overline{1, n}$.

Ta kí hiệu $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$ và $\underline{x}^{\mathfrak{a}} = x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$.

Đa thức n biến $x_1, \ldots, x_n$ trên R là một tổng hình thức của các từ:

$$f(\underline{x}) = \sum_{\mathfrak{a}\in\mathbb{N}^n} \alpha_{\mathfrak{a}}\underline{x}^{\mathfrak{a}},$$

trong đó $\alpha_{\mathfrak{a}} \in R$ và chỉ có một số hữu hạn hệ số $\alpha_{\mathfrak{a}} \neq 0$. Từ $\alpha_{\mathfrak{a}}\underline{x}^{\mathfrak{a}}$ với $\alpha_{\mathfrak{a}} \neq 0$ được gọi là *từ của đa thức* $f(\underline{x})$ và $\underline{x}^{\mathfrak{a}}$ là *đơn thức* của $f(\underline{x})$.

Phép cộng đa thức được định nghĩa như sau:

$$\sum_{\mathfrak{a}\in\mathbb{N}^n} \alpha_{\mathfrak{a}}\underline{x}^{\mathfrak{a}} + \sum_{\mathfrak{a}\in\mathbb{N}^n} \beta_{\mathfrak{a}}\underline{x}^{\mathfrak{a}} = \sum_{\mathfrak{a}\in\mathbb{N}^n} (\alpha_{\mathfrak{a}} + \beta_{\mathfrak{a}})\underline{x}^{\mathfrak{a}}.$$

Vì $\alpha_{\mathfrak{a}} + \beta_{\mathfrak{a}} \neq 0$ nếu một trong hai hệ số $\alpha_{\mathfrak{a}}$ hoặc $\beta_{\mathfrak{a}}$ khác 0. Vì vậy trong biểu thức ở vế phải cũng chỉ có hữu hạn hệ số khác 0 và do đó nó đúng là đa thức.

Ta đồng nhất $\alpha\underline{x}^{\mathfrak{a}}$ với đa thức $\sum_{\mathfrak{b}\in\mathbb{N}^n} \beta_{\mathfrak{b}}\underline{x}^{\mathfrak{b}}$, trong đó $\beta_{\mathfrak{a}} = \alpha$ và $\beta_{\mathfrak{b}} = 0$ với mọi $\mathfrak{b} \neq \mathfrak{a}$. Theo cách này tất cả các từ với hệ số 0 đều đồng nhất với một đa thức có tất cả hệ số bằng 0, ta gọi đa thức này là *đa thức không*, kí hiệu là 0. Đa thức hằng α là đa thức tương ứng với từ $\alpha \cdot 1$. Nếu $\alpha_1\underline{x}^{\mathfrak{a}_1}, \ldots, \alpha_p\underline{x}^{\mathfrak{a}_p}$ là tất cả các từ của $f(\underline{x})$ thì có thể xem $f(\underline{x})$ là tổng của các từ này qua phép đồng nhất trên

$$f(\underline{x}) = \alpha_1\underline{x}^{\mathfrak{a}_1} + \ldots + \alpha_p\underline{x}^{\mathfrak{a}_p},$$

trong đó $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_p \in \mathbb{N}^n$ là bộ số mũ khác nhau. Biểu diễn này được gọi là *biểu diễn chính tắc* của đa thức $f(\underline{x})$.

Giả sử $f(\underline{x}) = \sum_{\mathfrak{a}\in\mathbb{N}^n} \alpha_{\mathfrak{a}}\underline{x}^{\mathfrak{a}}$ và $g(\underline{x}) = \sum_{\mathfrak{a}\in\mathbb{N}^n} \beta_{\mathfrak{a}}\underline{x}^{\mathfrak{a}}$ lần lượt là biểu diễn chính tắc của hai đa thức $f(\underline{x})$ và $g(\underline{x})$, chúng được xem là bằng nhau nếu $\alpha_{\mathfrak{a}} = \beta_{\mathfrak{a}}$, với mọi $\mathfrak{a} \in \mathbb{N}^n$. Vậy biểu diễn chính tắc của $f(\underline{x})$ là duy nhất.

Phép nhân đa thức được định nghĩa như sau

$$(\sum_{\mathfrak{a}\in\mathbb{N}^n} \alpha_{\mathfrak{a}}\underline{x}^{\mathfrak{a}})(\sum_{\mathfrak{a}\in\mathbb{N}^n} \beta_{\mathfrak{a}}\underline{x}^{\mathfrak{a}}) = \sum_{\mathfrak{a}\in\mathbb{N}^n} \gamma_{\mathfrak{a}}\underline{x}^{\mathfrak{a}},$$

trong đó $\gamma_{\mathfrak{a}} = \sum\limits_{\mathfrak{b},\mathfrak{c}\in\mathbb{N}^n, \mathfrak{b}+\mathfrak{c}=\mathfrak{a}} \alpha_{\mathfrak{b}}\beta_{\mathfrak{c}}$. Ta thấy rằng $\gamma_{\mathfrak{a}} \neq 0$ chỉ khi tồn tại $\mathfrak{b}$ và $\mathfrak{c}$ thỏa mãn $\alpha_{\mathfrak{b}} \neq 0, \beta_{\mathfrak{c}} \neq 0$ và $\mathfrak{b} + \mathfrak{c} = \mathfrak{a}$. Do vậy chỉ có một số hữu hạn hệ số $\gamma_{\mathfrak{a}}$ khác không và phép nhân đa thức ở trên hoàn toàn xác định.

Với hai phép toán cộng đa thức và nhân đa thức nêu trên, tập tất cả các đa thức lập thành vành giao hoán với phần tử đơn vị là 1. Tập này được kí hiệu là $R[x_1, \ldots, x_n]$ hay $R[\underline{x}]$.

Định nghĩa 1.1.1. Vành $R[x_1, \ldots, x_n]$ xây dựng như trên được gọi là *vành đa thức* của n biến $x_1, \ldots, x_n$ trên vành R.

Chú ý 1.1.2. (i) Khi $n = 1$, ta có vành đa thức một biến thông thường. Đa thức một biến x thường viết dưới dạng

$$f(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 \quad (n \in \mathbb{N}, a_0, \ldots, a_n \in R).$$

(ii) Cho $0 \leq m \leq n$. Bằng cách xem mỗi từ $\alpha x_1^{a_1} \ldots x_n^{a_n}$ trên R như là từ $(\alpha x_1^{a_1} \ldots x_m^{a_m}) x_{m+1}^{a_{m+1}} \ldots x_n^{a_n}$ trên vành $R[x_1, \ldots, x_m]$, có thể xem $R[x_1, \ldots, x_n]$ như là vành đa thức $n - m$ biến $x_{m+1}, \ldots, x_n$ trên vành $R[x_1, \ldots, x_m]$, tức là

$$R[x_1, \ldots, x_n] = R[x_1, \ldots, x_m][x_{m+1}, \ldots, x_n]$$

Với quan điểm này có thể xây dựng vành nhiều biến (vô hạn biến $R[x_i, i \in I]$) từ vành một biến theo quy nạp. Tuy nhiên mỗi đa thức của các vành đó vẫn là một đa thức hữu hạn biến.

(iii) Khi tập các biến đã được xác định, ta chỉ kí hiệu đa thức đơn giản là $f, g, \ldots$ thay cho $f(\underline{x}), g(\underline{x}), \ldots$.

(iv) Quy ước phép nhân của các biến giao hoán ta có

$R[x_1, \ldots, x_n] = R[x_{\delta(1)}, \ldots, x_{\delta(n)}]$, với mọi phép thế $\delta \in S_n$.

Định nghĩa 1.1.3. *Bậc tổng thể* của đa thức $f(\underline{x}) = \sum\limits_{\mathfrak{a}\in\mathbb{N}^n} \alpha_{\mathfrak{a}} \underline{x}^{\mathfrak{a}}$ là số

$$\deg f(\underline{x}) = \max\{a_1 + \ldots + a_n | \ \alpha_{\mathfrak{a}} \neq 0\}.$$

Đối với đa thức một biến, bậc tổng thể chính là bậc thông thường. Đôi khi bậc tổng thể của đa thức nhiều biến cũng gọi tắt là bậc, nếu như không có sự hiểu lầm nào xảy ra.

Chú ý 1.1.4. (i) Bậc tổng thể của đa thức hằng là 0 và bậc tổng thể của đa thức 0 được quy ước là $-\infty$.

(ii) Nhiều khi ta còn dùng bậc của đa thức đối với tập con các biến, chẳng hạn $x_1, \ldots, x_m$, được định nghĩa như sau:

$$\deg_{x_1 \ldots x_m} f(\underline{x}) = \max\{a_1 + \ldots + a_m |\ \alpha_{\mathfrak{a}} \neq 0\},$$

trong đó $m < n$ cố định. Khi đó

$$R[x_1, \ldots, x_n] = R[x_1, \ldots, x_m][x_{m+1}, \ldots, x_n].$$

Mệnh đề 1.1.5. *Nếu R là miền nguyên, thì với mọi đa thức $f(\underline{x}), g(\underline{x}) \in R[\underline{x}]$ đều có:*

$$\deg(f(\underline{x})g(\underline{x})) = \deg f(\underline{x}) + \deg g(\underline{x})$$

và

$$\deg(f(\underline{x}) + g(\underline{x})) \leq \max\{\deg f(\underline{x}), \deg g(\underline{x})\}.$$

Mệnh đề 1.1.6. *Nếu R là miền nguyên, thì vành $R[\underline{x}]$ cũng là miền nguyên.*

Nhận xét 1.1.7. Khi R là một trường thì vành đa thức $R[\underline{x}]$ là miền nguyên và bậc tổng thể của đa thức thỏa mãn mệnh đề trên.

Định nghĩa 1.1.8. Cho R là một vành giao hoán, có đơn vị là 1. Các điều kiện sau là tương đương:

(i) Mọi tập khác rỗng các các iđêan của R đều có phần tử cực đại (đối với quan hệ bao hàm).

(ii) Mọi dãy tăng các iđêan trong R: $I_1 \subseteq I_2 \ldots \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \ldots,$ đều dừng, tức là tồn tại k để $I_k = I_{k+1} = \ldots.$

(iii) Mọi iđêan của R đều hữu hạn sinh: tức là với mọi iđêan $I \subseteq R$ tồn tại $f_1, f_2, \ldots, f_s \in I$ sao cho $I = (f_1, f_2, \ldots, f_s)$.